Approche énergétique du mouvement d'un point en référentiel galiléen

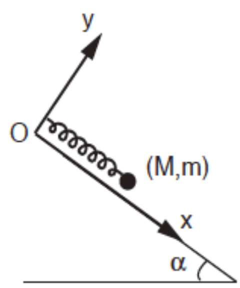
Exercice n°1 (★)

Une voiture de masse $m = 1{,}5.10^3 kg$ roule à $50\ km.h^{-1}$ sur une route horizontale. Elle freine brusquement jusqu'à l'arrêt total sur une distance de $d = 15\ m$. On modélise la force de freinage par une force constante opposée à la vitesse.

1. Calculer le travail de la force de freinage.
2. En déduire la norme de cette force.
3. Quelle distance faut-il pour s'arrêter si la vitesse initiale est de $70\ km.h^{-1}$?
4. Commenter cette phrase relevée dans un livret d'apprentissage de la conduite : « La distance de freinage est proportionnelle au carré de la vitesse du mobile. »

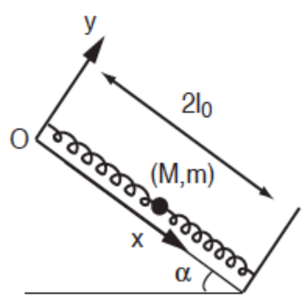
Exercice n°2 (★)

On considère un ressort de raideur k et de longueur au repos l_0, dont les extrémités sont reliées à un point fixe O et à un point matériel M de masse m. On suppose qu'il n'existe pas de frottement de glissement sur le plan incliné. Soit un axe (Ox) parallèle au plan incliné (voir la figure).



1. Déterminer l'abscisse x_e du point M à l'équilibre en fonction de l_0, m, g, k et α.
2. A partir de la position d'équilibre, M est déplacé d'une distance d comptée algébriquement sur (Ox) et lâché sans vitesse initiale. En utilisant l'énergie mécanique, établir l'équation horaire $x(t)$ en fonction de d, k, m et x_e. Déduire l'amplitude et la fréquence des oscillations.

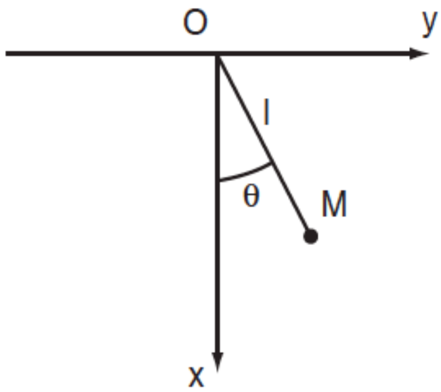
On considère le système suivant pour lequel deux ressorts identiques au précédent sont associés.



3. Déterminer l'abscisse x_e du point M à l'équilibre en fonction de l_0, m, g, k et α.
4. A partir de la position d'équilibre, M est déplacé d'une distance d comptée algébriquement sur (Ox) et lâché sans vitesse initiale. En utilisant l'énergie mécanique, établir l'équation horaire $x(t)$ en fonction de d, k, m et x_e. Déduire l'amplitude et la fréquence des oscillations.

Exercice n°3 (★★)

On considère un point matériel M de masse m, accroché à un point fixe O par l'intermédiaire d'un fil inextensible de longueur l et de masse négligeable. L'ensemble est situé dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g} = g\overrightarrow{u_x}$, $\overrightarrow{u_x}$ étant un vecteur unitaire de l'axe (Ox), vertical descendant.



On note θ l'angle orienté $\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}\right) = \left(\overrightarrow{u_x}, \vec{u}\right)$ où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire colinéaire à $\overrightarrow{OM}$.

On néglige les frottements. On lâche à l'instant $t = 0$ la masse d'un angle θ_0 sans vitesse initiale.

1. Que peut-on dire de l'énergie mécanique E_m du pendule ?
2. Donner son expression à tout instant t.
3. Déduire de la question précédente l'équation différentielle vérifiée par l'angle $\theta(t)$.
4. En supposant que les élongations angulaires sont faibles, montrer que l'équation du mouvement est celle d'un oscillateur harmonique de pulsation ω_0 dont on déterminera l'expression en fonction de l et g. En déduire $\theta(t)$.

On suppose maintenant la présence de frottements que l'on modélise par $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$, où $\vec{v}$ désigne la vitesse du point M et α une constante positive.

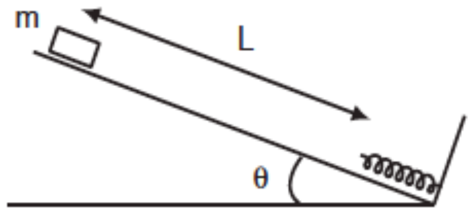
5. Que peut-on dire de l'énergie mécanique E_m du pendule ?
6. Appliquer le théorème de la puissance cinétique au pendule.
7. En se limitant à de petites élongations angulaires, montrer que l'équation du mouvement peut s'écrire

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2\theta = 0$$

   Donner l'expression de Q et son interprétation physique.

Exercice n°4 (★★)

Une masse ponctuelle de masse m est susceptible de se déplacer sur un plan incliné faisant un angle θ avec l'horizontale. Au bout du plan incliné, on place un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0. La masse m est lachée, sans vitesse initiale, à une distance L du ressort ($L \gg l_0$).

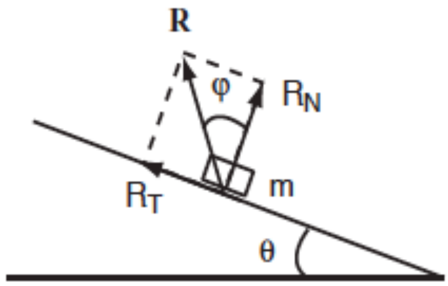


On suppose dans un premier temps qu'il n'y a pas de frottement entre la bille et le plan incliné.

1. Déterminer quelle sera, au maximum, la compression $\Delta l_{\max}$ du ressort ($\Delta l_{\max} = l_0 - l_{\min}$). On supposera l'énergie potentielle de pesanteur négligeable lorsque le ressort est compressé.
2. Quelle sera la hauteur maximale atteinte une fois la masse renvoyée par le ressort ?

On suppose maintenant qu'il existe des frottements pour lesquels le coefficient de glissement dynamique f est constant et donné par :

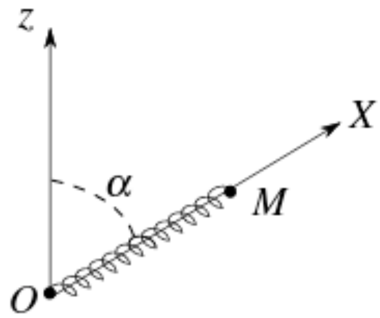
$$f = \tan(\varphi) = \frac{R_T}{R_N}$$



3. En examinant les forces agissant sur la masse ponctuelle, déterminer R_N et en déduire l'expression de R_T.
4. Par application du théorème de l'énergie cinétique, déterminer la compression maximale $\Delta l_{\max}$ du ressort (on supposera $\Delta l_{\max} \ll L$).
5. Comparer le résultat à celui obtenu à la première question. La masse remontera-t'elle aussi haut que précédemment ? Pourquoi ?

Exercice n°5 (★★★)

On considère une tige fixe, dans un plan vertical xOz, faisant l'angle α avec l'axe (Oz). Un anneau M de masse m est enfilé sur la tige et astreint à se déplacer sans frottement le long de celle-ci. Cet anneau est également relié à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 dont l'autre extrémité est fixée en O. On repère la position de M par $OM = X$.



1. Quelles sont les forces conservatives appliquées à M ? Déterminer l'expression de leur énergie potentielle E_p en fonction de X et α.
2. Établir l'équation différentielle du mouvement en appliquant le théorème de l'énergie mécanique.
3. On souhaite étudier graphiquement les différents mouvements possibles.
   a. Étudier la fonction $E_p(X)$ dans le cas où $mg\cos(\alpha) < kl_0$. Tracer son allure.
   b. Discuter sur le graphique les mouvements possibles en prenant à $t=0$ les conditions initiales suivantes : $X = l_0$ et $\frac{dX}{dt} = V_0$. Préciser la valeur maximale de V_0 pour que le mouvement se fasse entre deux positions extrêmes $X_1 > 0$ et $X_2 > 0$.
   c. Déterminer les fonctions $V(X) = \frac{dX}{dt}(X)$ et $X(t)$ dans les conditions de la question précédente.

Exercice n°6 (★★★)

Un cycliste assimilé à un point matériel se déplace en ligne droite. Il fournit une puissance constante P. Les forces de frottement de l'air sont proportionnelles au carré de la vitesse v du cycliste ($\vec{F_v} = -\alpha v \vec{v}$) où α est une constante positive. On néglige les forces de frottement du sol sur la roue et on choisit un axe horizontal (Ox) orienté dans la direction du mouvement du cycliste.

1. En appliquant le théorème de la puissance cinétique, établir une équation différentielle en v et montrer qu'on peut le mettre sous la forme :

$$mv^2 \frac{dv}{dx} = \alpha\left(v_l^3 - v^3\right)$$

   où v_l est une constante homogène à une vitesse dont on cherchera la signification physique.
2. On pose $f(x) = \alpha\left(v_l^3 - v^3\right)$.
   a. Déduire des résultats précédents l'équation différentielle vérifiée par f.
   b. Déterminer l'expression de la vitesse en fonction de x, s'il aborde la ligne droite avec une vitesse v_0.
   c. Application numérique : lors d'un sprint, la puissance développée vaut $P = 2\ kW$ et la vitesse limite vaut $v_l = 20\ m.s^{-1}$. Déterminer la valeur de α et en déduire la distance caractéristique pour qu'un coureur de masse $m = 85\ kg$ avec son vélo atteigne cette vitesse. Conclure.